Exercice: Continuité des racines de polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires scindés dans $\mathbb{R}$ de degré exactement n.

On pose $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^n$ la fonction qui à un polynôme associe l'ensemble de ses racines triées dans l'ordre croissant. On se propose de montrer que φ est continue, i.e. qu'il y a continuité des racines pour les polynômes scindés dans $\mathbb{R}$.

Soient E, F et G des espaces vectoriels normés de dimension finie.

1. Soit $f : E \to F$ surjective. Montrer que pour tout $A \subset F$, $f(f^{-1}(A)) = A$
2. Soit $f : E \to F$. On dit que f est **propre** si l'image réciproque d'un compact est un compact et on dit qu'elle est **fermée** si l'image d'un fermé est un fermé. Montrer que si f est continue et propre, alors elle est fermée.
3. Montrer que si $g : E \to F$ est telle que pour tout fermé A, $g^{-1}(A)$ est fermée, alors g est continue.
4. Montrer que pour $f : E \to F$ continue, surjective, et propre, et $g : F \to G$ telle que $g \circ f$ est continue, alors g est continue.
5. On pose
$$Z : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}$$
$$(r_1, ..., r_n) \mapsto \prod_{k=1}^{n} (X - r_k)$$
Expliquer pourquoi Z est continue et surjective.
6. Justifier que $\varphi \circ Z$ est continue.
7. On admet que Z est propre. En déduire le but.