Exercice: Continuité des racines de polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires scindés dans $\mathbb{R}$ de degré exactement n.

On pose $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^n$ la fonction qui à un polynôme associe l'ensemble de ses racines triées dans l'ordre croissant. On se propose de montrer que φ est continue, i.e. qu'il y a continuité des racines pour les polynômes scindés dans $\mathbb{R}$.

Soient E, F et G des espaces vectoriels normés de dimension finie.

1. Soit $f : E \to F$ surjective. Montrer que pour tout $A \subset F$, $f(f^{-1}(A)) = A$

   Correction: Soit $A \subset F$.
   Montrons que $f(f^{-1}(A)) \subset A$. Soit $y \in f(f^{-1}(A))$. Il existe $x \in f^{-1}(A)$ tel que $y = f(x)$. Alors $f(x) \in A$ car $x \in f^{-1}(A)$. Donc $y \in A$.
   Montrons que $A \subset f(f^{-1}(A))$. Soit $y \in A$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Alors $x \in f^{-1}(A)$, donc $y \in f(f^{-1}(A))$.
   Par double inclusion, on a alors le but.

2. Soit $f : E \to F$. On dit que f est **propre** si l'image réciproque d'un compact est un compact et on dit qu'elle est **fermée** si l'image d'un fermé est un fermé. Montrer que si f est continue et propre, alors elle est fermée.

   Correction: Soit $J \subset E$ un fermé. Pour montrer que $f(J)$ est un fermé, on procède par caractérisation séquentielle des fermés.

   Soit $(y_n) \in f(J)^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$.
   On pose $K = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$. K est un fermé borné donc compact (dimension finie). Il existe $(x_n) \in J^{\mathbb{N}}$ tel que $y_n = f(x_n)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in f^{-1}(K)$.

   Comme $f^{-1}(K)$ est compact car f est propre, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $x \in f^{-1}(K)$ tel que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Par continuité de f, $y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ donc $f(x) = y \in f(J)$.

   Alors $f(J)$ est fermé.

3. Montrer que si $g : E \to F$ est telle que pour tout fermé A, $g^{-1}(A)$ est fermée, alors g est continue.

   Correction: On se ramène à pour tout ouvert Ω, $g^{-1}(\Omega)$ est ouvert.
   Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Soit $\varepsilon > 0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. $\Omega_n = g^{-1}(\mathcal{B}(g(x), \varepsilon))$ est un ouvert. Comme $x \in \Omega_n$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset \Omega_n$.
   Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $\|x_n - x\| \leq r$. On a alors pour tout $n \geq n_0$ que $\|f(x_n) - f(x)\| \leq \varepsilon$.
   On a donc montré que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, donc par caractérisation séquentielle f est continue.

4. Montrer que pour $f : E \to F$ continue, surjective, et propre, et $g : F \to G$ telle que $g \circ f$ est continue, alors g est continue.

Correction: Soit A un fermé de G. D'après q1, $f(f^{-1}(g^{-1}(A))) = g^{-1}(A)$ car f est surjective. Or, $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$. Comme $g \circ f$ est continue et que A est fermé, $(g \circ f)^{-1}(A)$ est fermé.

D'après q2, comme f est continue et propre, elle est fermée. Donc $f((g \circ f)^{-1}(A))$ est fermé, i.e. $g^{-1}(A)$ est fermé.

On a montré que pour tout fermé A, $g^{-1}(A)$ est fermé. Donc par q3, g est continue.

5. On pose

$$Z : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}$$
$$(r_1, ..., r_n) \mapsto \prod_{k=1}^{n} (X - r_k)$$

Expliquer pourquoi Z est continue et surjective.

Correction: Z est continue car polynomiale en dimension finie. Z est surjective car tout polynôme de $\mathcal{P}$ a n racines et est unitaire.

6. Justifier que $\varphi \circ Z$ est continue.

Correction: Utiliser l'équivalence des normes en dimension finie et la norme-1 pour justifier la continuité en les points où ça pourrait coincer (les endroits où x_i passe supérieur à un autre x_j)

7. On admet que Z est propre. En déduire le but.

Correction: Z est continue, surjective et propre par q5, et $\varphi \circ Z$ est continue par q6, donc par q4, φ est continue.